EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE EXACTE VAKKEN

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN IN BINNEN- EN BUITENLAND

36e JAARGANG 1960/1961
IX - 1 JUNI 1961

INHOUD

P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN

Het tijdschrift **Euclides** verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang *f* 8,00; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs *f* 6,75.

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging. Het abonnementsgeld is begrepen in de contributie. Deze bedraagt *f* 8,00 per jaar, aan het begin van elk verenigingsjaar te betalen door overschrijving op postrekening 143917, ten name van Wimecos te Amsterdam. Het verenigingsjaar begint op 1 september.

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voor zover ze de wens daartoe te kennen geven en *f* 5,00 per jaar storten op postrekening 87185 van de Penningmeester van Liwenagel te Amersfoort.

Indien geen opzegging heeft plaatsgehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender" in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan A. M. Koldijk. Jan Huitzingstraat 43 te Hoogezand.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

VERVOLMAKINGSCURSUS

voor doctors en licentiaten in de wiskunde.

Verslag van

W. J. BRANDENBURG en W. P. THIJSSEN

Van 25—31 augustus 1960 waren 21 Nederlanders, 25 Zwitsers en 5 Luxemburgers de gast van het Belgisch ministerie van Openbaar Onderwijs. De officiële opening geschiedde namens de minister door M. Delot, chef van het kabinet van de minister. De prorector van de vrije universiteit van Brussel Prof. Bigwood merkte op dat reeds voor enige andere vakken dergelijke internationale vakantiecursussen georganiseerd waren. Sprekers waren vier Nederlandse en vijf Belgische hoogleraren. Drie Zwitserse sprekers waren te laat gevraagd om nog te kunnen komen.

De gegeven colleges stonden op universitair niveau; het kostte de meesten onzer veel moeite deze moderne stof in het rappe Frans te volgen. Er verschijnt een volledige tekst van alle voordrachten op kosten der O.E.E.C. in drie talen: Frans, Nederlands en Duits. Deze kunnen door de cursisten bij wijze van huiswerk bestudeerd worden voor het volgend jaar. Volgens de secretaris-generaal van de commissie voor de Hervorming van het middelbaar onderwijs, Dr. J. van Hercke, is het de bedoeling dat op de colleges van dit jaar wordt voortgebouwd met in hoofdzaak dezelfde sprekers en dezelfde cursisten.

In Brussel ging het uitsluitend om het bijbrengen van moderne wiskunde aan de leraren. De toepasbaarheid in de klas stond op de achtergrond. Geen enkel onderwerp of methode der wiskunde werd bij voorbaat uitgesloten, maar het geheel was gericht op de vervolmaking der docenten. Het heeft waarschijnlijk ook niet veel nut — gezien de internationale verschillen — zich door de toepasbaarheid in de middelbare school te laten leiden.

Prof. dr. E. W. Beth sprak over: *Logique inférentielle et logique bivalente de l'implication.*

Spr. liet zien hoe men door consequente toepassing van beginselen,

ontleend aan het gezond verstand, gebracht wordt tot de opbouw van twee verschillende systemen van implicatie-logica. De inferentiële logica sluit beter aan bij onze naïeve voorstellingen omtrent begrippen als ,,afleiden'' en ,,volgen uit'', maar de tweewaardige logica ligt ten grondslag aan de klassieke wiskunde. Door toepassing van een kunstgreep kan men bereiken dat de voordelen van de inferentiële logica op de tweewaardige logica overgaan. — Zoals de tweewaardige implicatie-logica de kiem bevat van de klassieke logica, zo bevat de inferentiële implicatie-logica de kiem van de intuïtionistische logica van Heyting.

Over *axiomatische wiskunde en symbolische logica* sprak Prof. Dr. Alfons Borgers (Leuven).

De graad van autonomie tegenover de andere wetenschappen die de meetkunde reeds in de Oudheid had verworven werd sterk verhoogd door het hernieuwd axiomatisch onderzoek gedurende de 19e eeuw. Toch bleef deze axiomatische meetkunde nog schatplichtig aan de gewone logica die gebruikt wordt in alle sferen van wetenschappelijke activiteit. Rond 1900 werd deze logica niet-consistent bevonden en moest ze vervangen worden door een contradictievrije symbolische logica. Van de hoofdstukken handelend over proposities, predicaten en gelijkheid geeft de spreker de specifieke logische constanten en voorbeelden van wetten en regels. Het nut wordt met een paar voorbeelden geïllustreerd. Er wordt gesuggereerd hoe de axiomatisering en formalisering samenwerken tot het ontstaan van formele stelsels. Daar een formeel stelsel voltooid gesloten en goed definieerbaar is wordt het vatbaar voor metalogische onderzoekingen over consistentie, onafhankelijkheid, beslisbaarheid, enz. enz. . . in een jeugdige tak van de tegenwoordige wiskunde, die mathematische logica heet.

In een volgende voordracht sprak Dr. Alfons Borgers over de *verzamelingenleer.*

Na de vermelding van verschillende naïeve definities van verzameling wordt aangetoond dat de ontwikkeling van de Analyse noodzakelijk geleid heeft tot de verzamelingenleer. Dan ziet men hoe deze leer er in slaagde de resultaten van de algebraïsering van de meetkunde en de arithmetisering van de Analyse te integreren zodat de wiskunde in het kader van de verzamelingenleer op weg was naar de volledige autonomie. Na verwijzing naar de antinomieëncrisis van de jaren rond 1900 wordt geschetst hoe de axiomatisering en de verbinding met de geformaliseerde logica bijdroegen tot het ont-

staan van de huidige formele stelsels van verzamelingenleer, waardoor de wiskunde zelfstandig wordt tegenover de andere wetenschappen.

Prof. Dr. Papy, hoogleraar te Brussel hield twee lezingen over „*L'Univers ensembliste*".

Euclides' grondslag is niet speciaal voor de wiskunde, maar algemener. Naar aanleiding daarvan meende Prof. Papy de vraag te moeten stellen of we onze modellen moeten ontleden aan de vrije natuur of dat we ze ook kunnen opbouwen vanuit een aparte wereld. Doordat men de grondslagen ging onderzoeken kwam men vanzelf tot de niet-Euclidische meetkunde. De algebraïsche structuur kan volkomen verschillend van de Euclidische of zelfs van de Archimedische zijn.

Men kwam tot verschillende soorten ruimten en meerdere meetkunden. Het grote verschil tussen meetkunde en rekenkunde werd overbrugd door de verzamelingenleer, die zo in onze wiskunde meer eenheid bracht.

Voor de eenvoud gaat men uit van een simpele intuïtie, die ons tot het z.g. „naïeve" standpunt brengt. Dit geeft ons reeds een goede inleiding, alleen de bestaanbaarheid moeten we dan aannemen. Een nadeel is echter, dat — zoals Russell aantoonde — deze theorie contradictoir is van nature. Het grote nut voor de leerlingen is, dat in de loop der verdere studie niet het gehele gebouw der grondslagen hoeft te worden afgebroken.

Dedekind heeft het getal reeds zuiver deductief gedefinieerd met behulp van verzamelingen van punten op een rechte. Poincaré veroorzaakte een grote crisis in de verzamelingenleer.

Een grote moeilijkheid is ongetwijfeld de definitie van een punt. Een lichaam wordt begrensd door een oppervlak. Via de begrenzing van oppervlakken komt men tot het begrip lijn. Uit de lijn komt men tot het begrip punt. Essentieel is echter dat een lichaam geen verzameling van punten is, terwijl het begrip punt door drie maal limietovergang toe te passen, afgeleid is uit het begrip lichaam.

De eenvoudige verzamelingenleer gaat uit van individuen, die objecten zijn van een verzameling. Daarin worden klassen gedefinieerd van objecten, die deze samenstellen. Deze objecten worden daartoe geselecteerd door een zeker predicaat; aangenomen wordt dat men van elk object zonder restrictie kan zeggen of hem het predicaat toekomt dan wel niet.

Ook de regels van de logica mag men gaan toepassen. Als eerste krijgen we dan een algemene definitie van *gelijkheid,* zowel voor objecten als voor klassen b.v. $3 + 4$ en $10000 - 9993$.

Eerste axioma: $A = B \iff (x \in A \rightarrow x \in B)$.

Het rekenen met klassen is in de naïeve theorie zeer belangrijk, vandaar dat we ook nog definiëren: $A \subset B$ b.v. alle rechthoeken $\{A\}$ zijn tevens parallellogrammen $\{B\}$.

$$A \subset B \iff \{x \in A \rightarrow x \in B\}.$$

Als twee zeer bijzondere gevallen komen dan voor de dag:
U = universum, waar elk object toe behoort, en
ϕ = lege verzameling, waar elk object niet toe behoort.
Voor de school is nog een grote moeilijkheid het rekenen met klassen, b.v. in een mand zitten bosjes worteltjes. Elk bosje is een klasse. Elke verzameling is zo een deel van een grote verzameling.

Tweede Axioma: (restrictie axioma): Elk deel van een verzameling is weer een verzameling, b.v. $A \cap B$, waarin $\cap$ aangeeft de doorsnede.

Zij E een verzameling en P een predicaat, of eigenlijk alle elementen, die dat predicaat bezitten, dan is $E \cap P \subset E$. Dit voert ons uitdrukkelijk tot het feit, dat ϕ een verzameling is. Ook de vereniging van alle deelverzamelingen van een verzameling is weer een verzameling.

Met behulp hiervan ging Prof. Papy de theorie van het natuurlijk getal opbouwen. Enigszins in de geest van Frege werd het begrip opvolger uit de theorie van Peano ingevoerd. Daarvoor gebruikte spreker twee definities:

1. Het paar (a, b) is gedefinieerd door $(a, b) = \{\{a, b\}, \{a\}\}$ waarbij $a \neq b$ ondersteld is. Het eenvoudigst kon men voor a en b twee punten in het vlak kiezen; $\{a, b\}$ was dan de pijl welke deze punten verbond en $\{a\}$ het beginpunt, als nulpijl.

2. $\phi = 0$ of liever $\# \phi = 0$, waarbij met $\#$ het cardinaalgetal wordt aangeduid of het aantal elementen, die deze lege verzameling bevat.

3. Verz. $A \cup \{A\} = A^+$, waarbij we A^+ de opvolger van A noemen b.v. $1 = 0^+ = \{\phi \cup \{\phi\}\} = \{\phi\}$ en $2 = 1^+ = \{1 \cup \{1\}\} = \{\phi \cup \{\phi\}\} = \phi, \{\phi\}$, enz.

Niet alleen lijkt mij dit ongeschikt voor elk stadium der middelbare school, maar ook vanuit het standpunt van voortgezette studie lijkt me dit moeilijk te waarderen.

Het begrip functie laat zich buitengewoon fraai veralgemenen ook voor het onderwijs. Daarbij is het nodig dat men uitgaat van twee verzamelingen. De eerste heet definitieverzameling of bron en de tweede beeldverzameling of bereik. Nodig is ook dat men goed afspreekt het onderscheid tussen afbeelding *in* en afbeelding *op* en bovendien over de weg terug.

Dr. P. Vredenduin heeft dit gedeelte beschreven naar aanleiding van Pedagogische studiedagen in Arlon in Euclides jrg. 36 III (November 1960).

In navolging van Bernays (Zürich) definieerde spr. het onderscheid tussen klassen en verzamelingen; dan kan men de paradox veranderen in een theorema van Russell: Het universum heeft zeer aparte eigenschappen en het uitsluiten van dit universum helpt ons bepaalde contradicties te ontgaan.

We merken nog op dat Prof. Papy dit geheel heeft uitgewerkt tot een cursus voor de lagere klassen van de middelbare school. Aangezien echter in België de toelatingsmogelijkheid tot de Universiteit niet automatisch volgt uit het behalen van een (school-) eindexamen, kon men dit programma alleen proberen op scholen met een geheel eigen examen. Men probeert het bij de opleiding tot kleuterleidster. De invloed van Prof. Papy schijnt nogal groot te zijn. Zelfs „Le figaro litteraire" een bijlage van zaterdag 18 juni 1960 geeft een uitvoerige beschrijving van zijn methode, zij het dan in dagbladstijl. Het is echter de verslaggevers nog niet gelukt de originele tekst in hun bezit te krijgen, ofschoon deze in stencilvorm voor de betrokken scholen verkrijgbaar was.

Enkele moderne begrippen van de analyse
door Prof. Dr. F. van der Blij (Utrecht).

Twee structuren worden eerst afzonderlijk beschouwd, namelijk de algebraïsche en de topologische. Vooraf komen de eenvoudigste begrippen uit de verzamelingenleer, zoals produktverzameling, relatie, afbeelding. De compositie als afbeelding van $A \times A$ in A voert tot de groep en tot systemen met twee composities namelijk de tralies (met composities $\cap$ en $\cup$) en de ringen (met composities $+$ en $\times$). Bij de twee composities is de interactie, in casu de distributieve wet van groot belang.

Bij de ringen worden nog die deelverzameling beschouwd, waarvoor het mogelijk is het restklassensysteem weer tot een ring te maken. Dit zijn de idealen. Uitgaande van een explicite definitie van een ideaal kan men ook in tralies idealen invoeren. Merkwaardig is dat in de *tralie* van de gehele getallen (met g.g.d. en k.g.v. als composities) de idealen dezelfden zijn als in de *ring* van de gehele getallen. Voor priemidealen is dit niet meer waar.

Voor de analyse hebben we echter naast de algebraïsche structuur ook nog een limietbegrip of een definitie van continuïteit nodig. Dit berust in wezen op de definitie van het begrip „*omgeving*". Door een stel deelverzamelingen als omgevingen van een element van een

verzameling V aan te wijzen verkrijgt men (mits aan zekere eenvoudige eisen is voldaan) een topologische ruimte. Wanneer een topologische ruimte tevens een groep (of een ring of een lichaam) is, kan men naar een verband tussen de algebraïsche en topologische structuur vragen. In eerste instantie zal men dit verband leggen door te eisen dat de composities *continue* functies in de topologie zijn. Opmerkelijk is dat de aanwezigheid van een algebraïsche structuur beperkingen oplegt aan de topologische structuur. (Een topologische groep is b.v. steeds een hausdorffse ruimte).

Een locaal bi-compact, samenhangend topologisch lichaam is b.v. isomorf met één van de bekende lichamen van de reële getallen, de complexe getallen of de quaternionen.

In een derde deel werd in vage en grote lijnen geschetst hoeveel verdere begrippen een rol spelen bij een stelling over de realisatie van Banachalgebra's, als algebra's van continue functies van een bi-compacte ruimte.

Prof. Dr. van Albada (Eindhoven) sprak over *symmetrische algebra's*.

Bij de ontwikkeling van het begrip ,,een algebra'' werd uitgegaan van de axioma's waaraan de elementen van een lichaam voldoen. De eisen werden verzwakt tot

I. A is een verzameling van elementen, waarvan een deelverzameling L een (commutatief) lichaam vormt.

II. a) Alle elementen van A vormen onder optelling een abelse groep.

b) Het produkt van twee elementen is steeds weer een element van A, terwijl $1 \cdot a = a$.

c) De beide distributieve wetten gelden: $a(b + c) = ab + ac$ en $(a + b)c = ac + bc$.

I. Dit deellichaam kan een karakteristiek hebben gelijk aan een willekeurig priemgetal b.v. $1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 0$ bij de karakteristiek 5 of de karakteristiek 0 waarbij $1 + 1 + 1 + \ldots$ nooit gelijk aan nul wordt. Het deellichaam L bevat dan weer een onderlichaam isomorf met de rationale getallen.

II. De elementen van L worden in het vervolg aangeduid met Griekse letters. Zij $x_1 \in A$ maar $x_1 \notin L$ dan bedoelen we met L_{x_1} de verzameling die L bevat en x_1 en tevens alle elementen die door onze bewerkingen (composities) uit beide kunnen worden afgeleid. Mogelijk is A dan uitgeput; zo niet dan kiezen we daarbuiten nog een x_2 en beschouwen L_{x_2}; als ook de vereniging van L_{x_1} en L_{x_2} dus $L_{x_1} \cup L_{x_2}$. Zo komen we tot $L_{x_1} \cup L_{x_2} \cup L_{x_3} \cup \ldots \cup L_{x_m}$, waardoor

A dan uitgeput is. Deze A bevat dan elementen als $\alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_{n-1} x_{n-1}$, terwijl ieder element van A slechts op één manier zo te schrijven is. De vermenigvuldiging is gedefinieerd zodra we van elk produkt $x_i x_j$ kunnen zeggen dat het gelijk is aan $\alpha_{ij}^{(0)} + \alpha_{ij}^{(1)} x_1 + \alpha_{ij}^{(n-1)} x_{n-1}$.

Deze coëfficiënten $\alpha_{ij}^{(k)}$ kan men trachten in tabellen op te schrijven. Ze zijn niet willekeurig omdat de distributieve wetten geldig moeten blijven. Op deze manier wordt echter een zeer Algemene Algebra over een (commutatief) lichaam K opgebouwd. Meestal immers stelt men als voorwaarde dat de vermenigvuldiging associatief is d.w.z. $(ab)c = a(bc)$. Dr. van Albada stelde daarvoor — zoals algemeen gebruikelijk — het begrip *associator*: $(a, b, c) = ab \cdot c — a \cdot bc$.

I. In een associatieve algebra geldt dan voor elk drietal a, b en c dat de associator gelijk is aan nul.

II. Een algebra heet *alternatief* indien $(a, a, b) = (b, a, a) = 0$, d.w.z. als de beide eerste gelijk zijn of de beide laatste gelijk, dan is de associator gelijk aan nul. In andere gevallen in het algemeen niet.

III. Is $(a, b, a) = 0$ dan heet de algebra flexibel.

Elke alternatieve algebra is flexibel. Dit volgt uit:

$$(a + b, a + b, a) = 0 \quad \{(a + b)(a + b)\}a — (a + b)\{(a + b)a\} = 0$$

$$\text{ook } (a + b, a, 0) = 0 \quad \{(a + b)a\}0 — (a + b) \cdot (a \cdot 0) = 0$$

Door aftrekking vindt men $(a + b, b, a) = 0$
Ook is ondersteld $(b, b, a) = 0$

Mede in verband met de distributieve wetten volgt nu $(a, b, a) = 0$ waarmee het gestelde is bewezen.

IV. Een algebra heet „Power associate" indien $a \cdot a^{n-1} = a^{n-1} \cdot a$ b.v. a^3 is te beschouwen zowel als $a \cdot a^2$ als $a^2 \cdot a$ enz. Er is vooralsnog geen verband tussen de voorwaarde „Power associate" en commutatief.

Voorbeelden: 1. Complexe getallen, waarbij $L =$ reële getallen en $x_1 = i$ met

1	i
i	—1

2. Het lichaam der quaternionen werd opgebouwd uit het vectorieel produkt. Daarvoor geldt de tabel

	x	y	z
x	0	z	$-y$
y	$-z$	0	x
z	$+y$	$-x$	0

Maar ontstaat er zo een algebra?

$$xy \cdot x = zx = y \qquad \| \qquad xy \cdot z = 0$$
$$x \cdot yx = x(-z) = y \qquad \| \qquad x \cdot yz = 0$$

Maar $xx \cdot y = 0$ en $x \cdot xy = xz = -y$. Wegens $0 \neq -y$ is de algebra zeker niet alternatief.

We nemen nu nog als voorwaarde, dat $x \cdot x$ niet getal nul wordt maar -1. Men kan die keuze van -1 nog aannemelijk maken. De tabel wordt nu nog uitgebreid met het element 1.

	x	y	z	1
x	-1	z	$-y$	x
y	$-z$	-1	x	y
z	y	$-x$	-1	z
1	x	y	z	1

We hebben nu een bijzonder soort algebra waarbij nl. de deling — niet door nul — uitvoerbaar is. Een dergelijk soort algebra heet een *divisie algebra* of soms een scheef lichaam.

De quaternionen vormen ook een voorbeeld van een *symmetrische algebra.* Aan elk element $a = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta z$ voegen we toe $\alpha - \beta x - \gamma y - \delta z = \bar{a}$. Op deze manier wordt in A een automorfisme gedefinieerd, met de periode 2, die tevens de basis elementen van L invariant laat. Indien in A een automorfisme bestaat, dat aan onderstaande voorwaarden voldoet, spreekt men van een symmetrische algebra.

$$a \to \bar{a}$$
$$\bar{a} \to a$$
$$a + b \to \bar{a} + \bar{b}$$
$$ab \to \bar{b} \cdot \bar{a}$$
$$\alpha \in L\alpha \to \alpha$$
Als $a \to a$ dan $a \in L$

We kunnen de volgende rekenregels afleiden voor een symmetrische algebra over L.

1. $a + \bar{a} \in L$. Bewijs: $\overline{a + \bar{a}} = \bar{a} + \bar{\bar{a}} = \bar{a} + a = a + \bar{a}$. Volgens ons laatste postulaat behoort $a + \bar{a}$ tot L.

2. $\overline{a \cdot \bar{a}} = \bar{\bar{a}} \cdot \bar{a} = a \cdot \bar{a}$ dus ook $a\bar{a} = \beta \in L$.

3. Zelfs is $a \cdot \bar{a} = \bar{a} \cdot a$. Bewijs. Omdat $\bar{a} + a \in L$ kan men stellen $\bar{a} = \alpha - a$, dan is $a\bar{a} = a(\alpha - a) = \alpha a - a^2 = (\alpha - a)a = \bar{a} \cdot a$.

4. Elk element $a \in A$ is een wortel van slechts één kwadratische vergelijking met coëfficiënten uit L, waarbij de coëfficiënt van de hoogste macht gelijk is aan 1.

Stel $\bar{a} + a = \alpha$ en $\bar{a} \cdot a = \beta$ dan voldoet zowel a als $\bar{a}$ aan $x^2 - \alpha x + \beta = 0$ want $a^2 - \alpha a + \beta = a^2 - (a + \bar{a})a + \bar{a}a = a^2 - aa - \bar{a}a + \bar{a}a = 0$. Er is slechts een dergelijke vergelijking want zou ook $x^2 - \gamma x + \delta = 0$ voldoen, dan zou daaruit volgen $(\gamma - \alpha)x = \delta - \beta$. Omdat L een divisie algebra is, zou dan x tot L behoren.

5. Nu is ook $\bar{a}$ slechts het spiegelbeeld van één element a.

6. Een symmetrische algebra is „Power associative"

$$a^2 = \alpha a - \beta \begin{cases} a \cdot a^2 = a\alpha a - a\beta \\ a^2 a = \alpha a \cdot a - \beta a. \end{cases}$$

De beide laatste leden zijn gelijk omdat b.v. $\beta a = a\beta$.

Interessanter wordt nu de vraag of elke quadratische algebra ook symmetrisch is. Lichamen met de karakteristiek 2 geven aparte moeilijkheden.

Prof. van Albada ging nog na hoe men tot verdere uitbreidingen kan komen b.v. de octaven, die een alternatieve algebra vormen. Met 16 elementen was de algebra nog flexibel. Verder blijft van belang het werken met een *norm*. Dit is een element van ons commutatieve deellichaam L, met de voorwaarde $N(a) \cdot N(b) = N(ab)$.

Prof. Dr. van Albada (Eindhoven) hield een tweede voordracht getiteld: *Projectieve vlakken*.

Het zou bezwaarlijk worden hiervan een uitvoerig verslag te geven. Er zou een groot aantal ingewikkelde figuren bij behoren. Voor de belangstellende lezer verwijzen we naar: Ebene Inzidenz Geometrie van Pickert (Leipzig) en naar de twee dictaten over projectieve en synthetische meetkunde van Dr. A. v. d. Sluys (Math. Instituut — Utrecht). Helaas is een van deze dictaten in het Engels, zodat eigenlijk het doel voorbijgeschoten wordt. In deze taal zijn reeds verschillende uitgaven met een synthetische opbouw.

Prof. van Albada onderstelde dat iedereen wel eens de projec-

tieve meetkunde bekeken had met behulp van homogene coördinaten. In plaats van dit analytisch standpunt ging spr. uit van twee verzamelingen: $E_1 = \{\alpha, \beta, \gamma, \ldots\}$ waarvan we de elementen punten noemen en een $E_2 = \{a, b, c, \ldots\}$ waarvan de elementen lijnen heten. Tussen deze elementen van de verschillende verzamelingen bestaan betrekkingen.

Axioma 1. Twee punten bepalen een lijn.

Axioma 2. Twee lijnen bepalen een punt.

Axioma 3. Er zijn minstens 4 punten, waarvan er geen drie collineair zijn.

Verder is van belang of het projectieve vlak deel uitmaakt van een driedimensionale ruimte, dan wel of daarover niets bekend is. Dit vooral met het oog op Desargues. Als viervlaksdoorsnijding blijkt deze stelling in de gewone incidentie-axioma's opgesloten, anders moet men deze stelling als een afzonderlijk axioma toevoegen. Door deze stelling van Desargues is een algebraïsering van de meetkunde mogelijk waarbij men komt tot het invoeren van een optelling en vermenigvuldiging van punten op een lijn. Dan blijken de punten op een lijn een — niet noodzakelijk commutatief — lichaam te vormen, dat we gebruiken om coördinaten in het affine vlak in te voeren. Ook de vergelijking van een rechte en de mogelijkheid tot invoeren van homogene coördinaten blijken voor de hand te liggen.

Door de beschouwingen over lichtstralen in het zwaarteveld van de zon komt men tot de conclusie, dat de fysische ruimte niet-Desargisch is.

Een poging tot algebraïsering zonder Desargues brengt ons tot ternaire lichamen, gebonden aan een vast puntenviervlak. Over ternaire operaties $(a, x, b) = y$ is nog weinig bekend. Het *Moufang*-vlak is een projectief vlak, waar een verzwakt axioma van Desargues ondersteld wordt, en waarbij men toch tot invoeren van coördinaten kan komen. Tenslotte werd nog even de octavenmeetkunde aangeroerd. Beide laatste onderwerpen worden uitvoerig besproken in een dictaat van Prof. Freudenthal dat aan het Mathematisch instituut te Utrecht verkrijgbaar is.

De tekst van Prof. Dr. Libois werd voorgedragen door zijn assistent Dr. Hubaat. De eerste lezing ging over *homogene ruimten* de tweede over *half homogene ruimten en niet-homogene.*

De definities van beide werden met zo'n overweldigend aantal voorbeelden toegelicht dat het voor de Nederlanders niet mogelijk was dit in dat tempo te verwerken. De opgegeven literatuur was bovendien uitsluitend gekozen uit speciale publikaties van de Bel-

gische universiteiten, zodat het ook weinig zin heeft daarnaar te verwijzen. Ongetwijfeld zullen allen zeer benieuwd zijn naar de uiteindelijke tekst die door de O.E.E.C. ook in het Nederlands verkrijgbaar wordt gesteld. Wat we ėr nog van opvingen was dermate interessant en plaatste vele oude bekende meetkundige relaties in een zodanige samenhang, dat we sterk geprikkeld werden tot verdere studiė. En dit was een der doelstellingen van deze week in Brussel.

Mathematische statistiek door Dr. J. Teghem.

Hiervoor kunnen wij verwijzen naar het artikel van Dr. J. Teghem in Mathematica en Paedagogia 4e jaargang no 12.

Het is een boeiend overzicht over de beschrijvende statistiek, de statistische afleidingen en de onderzoekingsmethoden.

Prof. Dr. G. Hirsch (Brussel) ging de *ontwikkeling van het integraalbegrip* na in het universitair onderwijs gedurende de laatste 50 jaar.

Zonder speciaal op de mogelijkheden van toepassing van dit nieuwe integraalbegrip te letten, werd vooral de methodische opbouw nagegaan. Daarbij komen twee essentiële punten te voorschijn n.l. de algebraïsche naast de topologische beschouwingen, die ook in zoveel andere wiskundige theorieën een rol spelen.

Reeds in de oudheid (Archimedes) gaven oppervlakteberekening, inhoudsbepaling en de theorie der momenten aanleiding tot een voorlopig integraalbegrip. Op het ogenblik komt daar nog bij de theorie der waarschijnlijkheid en de functieleer. De exhaustiemethode b.v. bij de bepaling van de oppervlakte van een parabool, bracht niet alle oppervlaktebepalingen tot een gȯed einde. De oppervlakte tussen een stuk van een tak van een hyperbool en de asymptoot bleef onvindbaar. Men had nog geen volledige methode voor die integraalrekening en pas Newton en Leibniz gaven daartoe de grote stoot. Men kwam tot het inzicht dat differentiatie en integratie inverse bewerkingen zijn. Pas tegen het begin der negentiende eeuw kwam er een degelijke basis, door het werk van Cauchy enz. Tot dan toe zocht men het in werken met 0/0, waarbij de nul geen nul was: Men had een uitvoerig woordgebruik nodig om de duistere begrippen te omhullen.

Het integreren voert vaak tot meer ingewikkelde functies b.v. van een eerste graads functie komt men tot een kwadratische, $\frac{1}{x}$ geeft een logaritmische, $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ de cyclometrische functies. De afgeleide

„gaat altijd" en geeft meestal eenvoudiger functies. Het inzicht dat integreren steeds het zoeken van een primitieve functie is, is onbevredigend. Vooreerst wordt integratie vaak vereist in gevallen waarin de integrand niet continu is, vooral bij de toepassingen. Vervolgens bestaan er functies, waar men wel kan spreken over integralen in de zin van kwadraturen, maar waarbij geen primitieve te vinden is in de gebruikelijke zin.

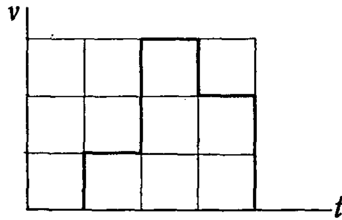


Fig. 2

We beschouwen $f(t)$ die gelijk is aan 1 voor $1 \leqq t \leqq 2$, gelijk aan 3 voor $2 < t < 3$ en gelijk 2 voor $3 \leqq t \leqq 4$. Dit kan de bewegingswet zijn van een punt dat tot het tijdstip 1 in rust is, en zich daarna beweegt telkens gedurende een tijdseenheid met een snelheid 1, 3 respectievelijk 2 en na $t = 4$ in rust blijft. De integraal s wordt $s = t - 1$ voor $1 \leqq t \leqq 2$, $s - 1 = 3(t - 2)$ voor $2 \leqq t \leqq 3$, $s - 4 = 2(t - 3)$ voor $3 \leqq t \leqq 4$ en $s = 6$ voor $t \geqq 4$.

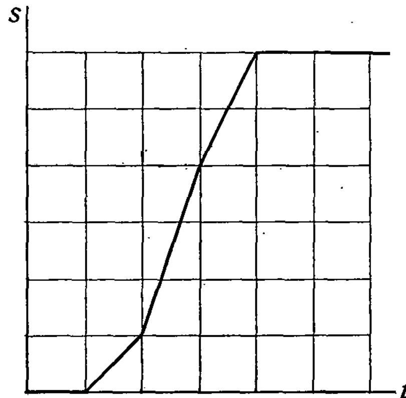


Fig. 3

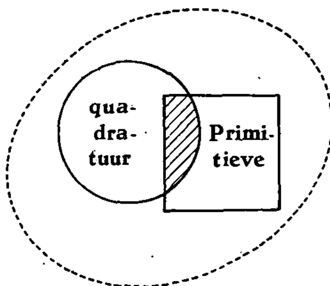
Dit is kennelijk geen primitieve, want $s(t)$ heeft geen afgeleide in de punten $t = 1$, $t = 2$, $t = 3$ en $t = 4$. De linker- en rechter afgeleiden bestaan wel maar zijn ongelijk.

Om deze gevallen toch op te nemen zullen we aan de primitieve niet meer de eis stellen, dat haar afgeleide in elk punt van het seg-

ment gelijk is aan de integrand, maar toestaan dat dit niet uit hoeft te komen in een aftelbaar aantal punten. Dit wordt dan een primitieve in uitgebreide zin.

Interessant wordt nu de functie $g(x)$ op $(0, 1)$ waarbij $g(x) = 0$ voor irrationale x en $g(x) = 1$ als x rationaal is. De rationale getallen vormen een aftelbare verzameling, zodat $G(x) = 0$ een primitieve is in onze uitgebreide betekenis. Indien we nu integraal interpreteren als primitieve, dan is $g(x)$ integreerbaar. Is integreren een kwestie van kwadratuur, dan bestaat er geen integraal. Ook de definitie van Riemann sluit hier het bestaan van zo'n integraal uit; daarentegen brengt de definitie van Lebesgue ons hier uitkomst.

We zoeken een ruimere definitie, die zowel de kwadratuur als de primitieve omvat, en die misschien ook nog resultaten geeft in gevallen waarin geen van beide van toepassing is.



Bij een voortgezette theorie ging Prof. Hirsch uit van *trapfuncties*, zoals in de eerste figuur bij dit stukje: In elk deelinterval is de functie constant, terwijl de functie waarde in elk der deelpunten x_i willekeurig kan zijn.

Men kan het aantal deelpunten doen toenemen; daardoor ontstaan trapfuncties die in elk punt zeer weinig afwijken van andere functies (b.v. de kwadratische) die zelf geen trapfuncties zijn.

Een rij trapfuncties φ_n geeft — alle op hetzelfde segment — aanleiding tot een rij integralen $I(\varphi_n)$, welke integralen op zich zelf reële getallen zijn. Indien nu $\lim\limits_{n \to 8} I(\varphi_n)$ bestaat terwijl φ_n een zekere functie f tot limiet heeft. Deze beschouwingen werden uitgevoerd aan de hand van de algebraïsche begrippen als vectorruimte, ringen, lineaire functionelen, genormeerde ruimten enz. Ook topologische gezichtspunten spelen een rol b.v. metrische ruimte, equivalentie relaties, quasi-metrieken, voorwaarde van Cauchy. Zo kwam men ertoe de verzameling van de trapfuncties aan te vullen tot een volledige of complete d.w.z. die welke de verdichtingen van de Cauchyrijen opgebouwd uit zijn eigen elementen, ook bevat.

Wanneer het lichaam K der scalairen de reële getallen zijn noemt men een vectorruimte over K, die genormeerd en volledig is, de *ruimte van Banach*. Bijzondere aandacht werd besteed aan de uniforme continuïteit en uniforme convergentie. Zo kwam Prof. Hirsch uit de trapfunctie via uniforme limieten tot de regelmatige functies of eenvoudige functies. (fonction réglées) met hoogstens een aftelbaar aantal singulariteiten. Aangetoond kan worden dat bij deze functies in elk singulier punt zowel linker- als rechterlimiet bestaan. Tot de klasse van deze functies behoren alle continue en alle monotone functies op een gesloten segment.

Een integraal wordt nu een lineair functioneel van deze regelmatige functies. Zij vormen immers een vectorruimte met een metriek. Een lineair functioneel is daarom mogelijk. Een lineair functioneel is een afbeelding van de vectorruimte in het lichaam der reële getallen waarvoor geldt $I(\varphi_1 + \varphi_2) = I(\varphi_1) + I(\varphi_2)$ en $I(\alpha\varphi) = \alpha \cdot I(\varphi)$.

Men kan aantonen dat deze afbeelding hier continu is. Deze uitbreiding van het integraalbegrip omvat al onze vroegere afleidingen als speciale gevallen. Het is echter niet de enige weg om de trapfuncties uit te breiden en zo tot een algemeen integraalbegrip te komen. Het boek van Prof. Zaanen: An introduction to the Theory of Integration (North Holland; Amsterdam 1958) geeft nog een geheel andere ontleend aan Daniell.

In een laatste deel behandelde Prof. Hirsch uitvoerig het begrip „maat" in de zin van *Lebesgue* en het theorema van *Riesz* over de representatie van lineair functionelen over de ruimte der continue-niet-negatieve-functies. Het voor alle leraren zo vertrouwde begrip integraal had een nieuw modern kleed gekregen, vereenvoudigd en veralgemeend met de hulpmiddelen van de moderne algebra en topologie.

Hemelmechanica door Prof. Dr. A. Deprit te Leuven.

Teneinde een idee te geven van de gecompliceerdheid der problemen, die men op het gebied van de hemelmechanica ontmoet als men baanberekeningen van kunstmanen uitvoert, heeft Dr. Deprit, verbonden aan de universiteit van Leuven, het drie lichamen-probleem met twee gefixeerde centra en het probleem van Lagrange tot in bijzonderheden geanalyseerd.

In een synodisch coördinatensysteem onderscheiden we bij de beweging van een kunstmaan in de newtonse attractiesfeer van de aarde en de maan vijf soorten krachten:

1) De coriolis-krachten, die een potentiële vector voortbrengen.

2) De centripetale krachten, die de versnelling van de rotatie van het coördinatensysteem bewerkstelligen.

3) De newtonse attractiekracht van de aarde.

4) De newtonse attractiekracht van de maan.

5) De storingskrachten, die men in rekening brengt, als men de maanbaan in eerste benadering als een cirkel genomen heeft.

Als men de beweging van een kunstmaan bestudeert in het attractieveld van de massa's aarde-maan, onderstelt men deze vast in de ruimte. Deze approximatie kan men nauwelijks van astronomisch of mathematisch gezichtspunt rechtvaardigen, men krijgt niettemin een idee van de gecompliceerdheid van de banen, als men dit vereenvoudigde probleem bestudeert.

Het probleem van de twee gefixeerde centra wordt sterk vereenvoudigd door scheiding van de variabelen, als het uitgedrukt wordt in elliptische coördinaten, waarvan de gefixeerde massa's de polen zijn. Men kan dan in een keer de oplossingen opschrijven, velen houden daar met hun analyse op. Dr. Deprit gaat hier juist voort door een classificatie van de banen zelf te geven onder het bespreken van de elliptische integralen van de eerste soort, die de oplossing zijn. Eerst merkt men op, dat er zich op het potentiële oppervlak twee openingen rond de gefixeerde masa's bevinden; deze openingen zijn verbonden door een maangebied, waarvan de kern een merkwaardig punt is, die de evenwichtsoplossing geeft. Om dit gebied te bereiken moet de kunstmaan een voldoende beginsnelheid hebben, d.w.z. groter dan een kritische snelheid. Met een beginsnelheid, die kleiner is dan de kritische snelheid zou de kunstmaan zich slechts om een van de beide gefixeerde centra kunnen bewegen; voor beginsnelheden tussen de kritische- en de ontsnappingssnelheid zou de kunstmaan om het ene en om het andere centrum kunnen draaien. Met groter snelheden dan de ontsnappingssnelheid zou de kunstmaan zich naar het oneindige buiten het systeem bewegen.

Met elliptische integralen kan men deze elementaire classificatie verfijnen. Deze leidt tot een volledige opsomming van mogelijke banen:

ten eerste de drie klassen van banen, die periodiek zijn,
ten tweede de asymptotische banen,
ten derde de enkelvoudige banen,
ten vierde de collineaire banen.

Ook hier lost men met elliptische coördinaten het probleem geheel op. Het potentiële oppervlak vertoont nog twee slenken rond de

aarde en de maan, verbonden door een heuvel, waarvan de kern het punt van evenwicht van de collineaire configuraties is van Lagrange.

Naar het oneindige langs de as aarde-maan, heeft het oppervlak twee heuvels, die corresponderen met twee andere collineaire configuraties, van Lagrange, terwijl zij loodrecht op de as twee pieken vertoont, die corresponderen met gelijkzijdige configuraties van Lagrange. Hier zijn dus vier types van kritische beginsnelheden te onderscheiden, die corresponderen met de verschillende evenwichtsposities van Lagrange, En deze analyse van de verschillende snelheden brangt een eerste baanclassificatie voort.

Egorov, de sovjetgeleerde, die de banen van de Lunik heeft berekend, heeft aangetoond dat deze classificatie niet de belangrijkste is. Teneinde hierin licht te brengen heeft Deprit de hyper-elliptische integralen nagegaan, die de oplossingen zijn van het Lagrange probleem. Zij leiden tot bestaanbaarheid en de toestand van de wortels van een algebraïsche vergelijking van de vierde graad met reële coëfficiënten.

Wij zullen niet de lijst van de mogelijke banen van het Lagrangeprobleem reproduceren.

Tenslotte heeft de heer Deprit nog verscheidene families van asymptotische banen, die door zijn leerlingen met het probleem van Lagrange zijn uitgewerkt, behandeld.

Dr. P. v. Hiele — Bilthoven hield een voordracht getiteld: *Niveaus in de argumentatie.* De lezing werd afgewisseld met korte samenvattingen in het Frans.

De titel doet aan psychologie denken, maar spreker wil het denken van de mens niet nagaan, maar slechts hoe het zich voor ons uit in zijn ontwikkeling en zijn resultaten. Dit is wel van belang voor de wiskunde en het onderwijs daarin.

Er werd uitgegaan van de eenvoudige bewering: Die figuur is een ruit. De zin van deze uitspraak is zeer verschillend vanuit het standpunt van degene die dit zegt. Indien het een beginnend scholier is wil die frase zeggen: Die figuur heeft een vorm, die ik heb leren aanduiden met het woord ruit. Vaak hangt het af van de positie der figuur ten opzichte van de waarnemer of hij dit ziet. Een vierkant met de diagonaal horizontaal wordt vaak ruit genoemd, maar indien een zijde horizontaal getekend is, noemt de beginneling het geen ruit.

Iemand die reeds enige tijd wiskunde heeft gestudeerd bedoelt met bovenstaande bewering: Die figuur is een verzameling van allerlei eigenschappen, die ik heb leren aanduiden met het woord ruit. Het vierkant bezit al deze eigenschappen en men kan deze daarom

met recht tot de ruiten rekenen. Zijn bewering is helemaal niet gegrond op een waarneming van een aangeduide figuur. Het is voor hem voldoende te weten dat de bedoelde figuur vier gelijke zijden heeft.

In het eerste geval is het oordeel gegrond op een waarneming, in het tweede geval op een relatienet, waarover de spreker beschikt. In dat net vormen de woorden „ruit", „hoek", „vierkant" slechts knooppunten; elk van hen representeert een verzameling van eigenschappen. Ze zijn onderling verbonden door diverse relaties. Eigenlijk is dit hele relatienet in plaats van de waarneming gekomen. Meestal zal deze persoon wel een ruit zien, maar hij ziet een ruit totaal verschillend van die vóór hem is en waarover hij spreekt. Hij laat zich niet leiden of misleiden door een toevallige tekening, maar slechts als men kan aantonen, dat de vier zijden gelijk zijn, noemt hij het een ruit. Zonder het bestaan van zo'n relatienet is redenering onmogelijk. De eerste waarnemers beschikten nog niet over zo'n net, wat men trouwens in het begin nooit bezit; men moet het verwerven door een lange en moeilijke leerperiode. Men spreekt van het *grondniveau,* wanneer de persoon nog niet over zo'n relatienet aangaande een bepaald onderwerp beschikt; wie wel over een dergelijk net beschikt bevindt zich op het eerste niveau.

Bij het onderwijs kan men vaak duidelijk het niveauverschil tussen leraar en leerling waarnemen.

1. De leerling kan de redenering van de docent in het geheel niet volgen. Dat hij niets daarvan begrepen heeft kan blijken indien hij de redenering moet herhalen.

2. De leraar voelt zich onmachtig: Zijn uitleg heeft geen enkel resultaat. Het lijkt alsof hij een andere taal spreekt dan de leerling. (Eigenlijk is dat ook het geval).

3. Nadat tijdens de studie de leerling een hoger niveau heeft bereikt, is een terugval bijna uitgesloten.

Nadat de leerling dit relatienet heeft verworven, is ruit voor hem een symbool van eigenschappen. De verhouding tot andere figuren is echter bepaald door de eigenschappen en een vierkant wordt een (bijzondere) ruit voor hem. Het bezit van een terminologie, waarmee het mogelijk is over dit object ruit te spreken, is een groot voordeel maar ook een nadeel. Een begrip verkregen door ervaring is veel rijker aan eigenschappen dan voor zijn plaats in het relatienet nodig is. Zo is b.v. een tekening van een plant bij het determineren van een onbekende bloem veel handiger dan de beschrijving in de flora.

Pas nadat de ruit een geheel van eigenschappen vertegenwoordigt is het zinvol deze te ordenen b.v. in logische samenhang. In dit

stadium pas kan men b.v. zeggen, dat uit het feit dat een diagonaal symmetrie-as is volgt, dat twee overstaande hoeken gelijk zijn, terwijl twee andere middendoor gedeeld worden. Voor de didactiek impliceert dit, dat het zinloos is eigenschappen in logische volgorde te plaatsen, indien deze nog slechts zeer ten dele bekend zijn. Zelfs al heeft de leerling enig inzicht in een logisch systeem, dan is het nog verkeerd de meetkunde der ruimte te beginnen uitgaande van axioma's.

Het is onmogelijk uit te leggen wat men wil zeggen met: Deze eigenschap volgt uit die eigenschap. Men kan wel analogieën zoeken, zoals een geslachtsboom. Indien de leerling in een bepaalde situatie zelf een logische conclusie gevonden heeft, kan men aangeven dat dit de eigenlijke (deductieve) methode is. Dan komt echter een nieuwe moeilijkheid: De waarneming kan vertroebelend zijn.

De juistheid van de bewering: de diagonaal van de ruit is een symmetrie-as is dan niet meer het belangrijkste; het is niet nodig te onderstellen dat overstaande hoeken gelijk zijn. Het enig belangrijke is, dat bewering A en het niet-gelden van bewering B niet tegelijkertijd kunnen bestaan. Op deze wijze zijn we aangeland op een ander relatienet. We interesseren ons niet meer voor de inhoud der beweringen in de eerste plaats, maar hun verband is hoofdzaak. Het relatienet is weer afgescheiden van het vorige, zoals dat van het eerste niveau is afgeleid van het grondniveau.

Wel baseert het relatienet in het tweede niveau zich op dat van het eerste. Wanneer dit laatstgenoemde ontbreekt is het onmogelijk het relatienet op tweede niveau redelijk aan te brengen. Men moet zelfs dat van het eerste niveau objectiveren; men komt tot dit objectief verband door ermee te handelen, erover te spreken en te discussiëren. Toch is het mogelijk dit relatienet op een imperatieve manier aan te brengen b.v. door van buiten leren. Het is dan echter onmogelijk zijn fouten te corrigeren want men doorziet de structuur niet. Ook is het dan niet mogelijk de zaak in zijn samenhang te beschouwen want men doorziet niet de betekenis tijdens het betoog. De leerling kan ook geen deel hebben aan de concretisering der resultaten, want hij begrijpt te laat de betekenis.

Redeneren in een logisch systeem behoort tot het tweede niveau. De uitdrukking van waarnemingen behoort tot het eerste. Niet alleen zijn de relatienetten in beide niveaus verschillend, maar men drukt zich ook uit in het ene net, dan wel in het andere. Slechts in zeer zeldzame gevallen gaat men werkelijk denken in het tweede niveau. Het is wel mogelijk dat gevorderde denkers structuren in het tweede niveau uitspreken en door de leerlingen laten nazeggen,

terwijl deze ook de regels toepassen zonder zich rekenschap te geven van de werkelijke betekenis. Zo kan men ver afdwalen van oorspronkelijke inhoud van de uitspraken.

Voor het onderwijs is het een belangrijke vraag of de discontinuïteit der relatienetten werkelijk bestaat dan wel niet. De overgang van het grondniveau naar het eerste is een overgang van een niveau zonder relatienet naar een met relatienet. Het basisniveau heeft wel een eigen taal, maar dit alleen maar een aanduiding van dingen: Dit is een ruit, terwijl men nog helemaal niet toe is aan een analyse zoals: Dit is geen ruit, want de zijden zijn niet gelijk. Deze analyse vormt het begin van het eigenlijke eerste niveau. Het oordeel baseert zich op deze analyse en gaat het intuïtieve oordeel vervangen. Degene die zich nog op het grondniveau bevindt heeft het recht te ontkennen dat het vierkant een ruit is. Wie echter het gewone relatienet aanvaardt, moet zich onderwerpen aan de uitspraak dat het vierkant wel een ruit is. Deze onderwerping hoort spontaan te zijn en niet een van buiten opgelegde dwang. Men kan trachten de leerling te overtuigen, dat de uitspraken te moeilijk zullen worden indien men de vierkanten niet tot de ruiten rekent, maar wanneer hij niet overtuigd kan worden hierdoor is er eigenlijk weinig aan te doen.

De redeneringen op het tweede niveau beschouwen de structuur van het relatienet in het eerste niveau. Het gaat niet over waarnemingen, maar over de onderlinge verbanden, zoals de spreker die ziet. Dit is weer een discontinuïteit zij het van een andere soort dan de eerste overgang, maar niet minder radicale. Het nieuwe relatienet op dit tweede niveau vormt zich door beschouwing van dat op het eerste niveau, maar omvat dit eerste net niet.

De redeneringen op het basisniveau, het eerste en het tweede niveau vormen een hiërarchisch systeem. Elk veronderstelt het voorafgaande, waarbij zich de volgende vragen voordoen: 1. Kan men deze volgorde als een continuïteit zien of is er een discontinuïteit? 2. Is er nog een derde of hoger niveau? Immers verschillende takken van wetenschap, fysica, scheikunde, biologie, geschiedenis, taalwetenschap hebben tweede niveaus die op een andere wijze uit het eerste niveau zijn afgeleid. Is er geen wetenschap die zich bezighoudt al deze wetenschappen te karakteriseren: een derde niveau, dat der filosofie?

Spr. meent dat dit niet tot een discontinuïteit voert, wel komt men misschien tot een structuurvergelijking der relatienetten in deze tweede niveaus bij de verschillende wetenschappen.

In het onderwijs openbaart zich dit onderzoek naar superstruc-

turen als een hoger niveau: De leerling kan de redenering van de leraar niet meer volgen, de uitleg lijkt niet voldoende en men schijnt weer twee talen te spreken. Een nauwkeurige analyse der moeilijkheden toont aan dat het geen nieuw niveau is en de uitleg is wel mogelijk door te wijzen op de gelijkenis of overeenkomst tussen de bekende structuur en de nieuwe structuur.

Een tweede omstandigheid die ons een derde niveau suggereert is de mogelijkheid tot de reductie van de niveaus. Het is mogelijk de structuur van het tweede niveau voor te stellen door tekens, b.v. de algebra is een voorstelling van de structuur van het rekenen op het tweede niveau en de formele logica is een representatie van de structuur van het tweede niveau der algebra. Door deze nieuwe notatie heeft men de redenering teruggebracht tot een lager niveau, het wordt een eenvoudige redenering, maar men heeft ook het relatienet verlaagd en vooral bevat het net van de notaties niet alle verbindingen in het originele net. Op deze manier kan men een structuur tot een lager niveau terugbrengen en daarna kan men terugkeren naar het hogere niveau. Dit geeft inderdaad de indruk dat er nog een hoger niveau is.

Een derde omstandigheid, die ons een groter aantal niveaus wil doen aanvaarden is de wijze waarop men bij het leren tot een hoger niveau geraakt. Daarbij moet men fasen onderscheiden.

1. *Informatie*: De student leert het werkterrein kennen. Dit gebeurt niet alleen door expliciet aanbieden, maar zelfs meestal impliciet. Men kan b.v. geen definitie geven zonder dat de zaak bekend is.

2. *Gebonden oriëntatie*: Vaak gebeurt dit vóór de informatie, de leraar is aan de gang, zonder dat de leerling mee kan komen.

3. *Explicitatie*: Het expliciet onder woorden brengen wat men impliciet al weet. De leerling neemt kennis van het onderling verband en leert de taal van deze stof.

4. *Vrije oriëntatie*: De leerling leert zijn weg kennen in het relatienet.

5. *Integratie*: Hierbij geeft de leerling voor zich zelf een samenvatting en hij krijgt een totaal overzicht in het net.

In elk der 5 fasen (op ieder niveau afzonderlijk) heeft de leraar een andere taak. Wanneer de leerling de derde fase heeft doorgemaakt kan hij zich een beetje uitdrukken in de taal van het nieuwe relatienet; hij kent enig verband, kan het betoog van een ander volgen en met verstand navertellen. Is dit een hoger niveau? Dr. P. v. Hiele vindt dit niet een niveau in de redenering maar een fase in het leerproces, al lijkt hij halverwege te staan op een niveau-overgang.

De leraar moet bij de hulp aan de leerling steeds op zijn eigen kennis bouwen en vertrouwen. Wanneer een ander de structuur niet ziet zoals wij, is de ander alleen van de juistheid te overtuigen wanneer de leraar terugvalt naar een lager niveau. Door zuiver redeneren wordt maar zelden een fout ontdekt, meestal door een consequentie. De leraar moet zich bij het onderwijs bewust zijn, dat de overgang van grondniveau naar eerste niveau een grote sprong is, een discontinuïteit. De leerling moet afzien van de aanschouwing.

Al kan de overgang van de eerste naar tweede niveau iets minder scrupuleus geschieden — het deduceren is reeds enigermate bekend — toch moet men hierbij het ontdekken van automatismen met begrip voorbereiden. De gewenning aan een bewijsvorm kan het bewijzen ook in de weg staan: Bij de beginselen der kansrekening b.v. draait men bij de opbouw vaak in een cirkeltje rond.

Woensdag 31 augustus werd om twee uur in aanwezigheid van de heer directeur-generaal Levarlet de *slotzitting* gehouden.

Na een dankwoord aan de medewerkende hoogleraren memoreerde Dr. J. van Hercke nogmaals het doel van deze vervolmakingscursus. In de eerste plaats wil men afgestudeerden weer in aanraking brengen met de moderne wiskunde; hoe deze wiskunde tevens in de school aan de orde kan komen is een zaak van de tweede orde. Om deze leergang te kunnen continueren is initiatief, een organisatie en geld nodig. Dezelfde deelnemers zullen in het algemeen worden uitgenodigd. Daarvoor zal eerst een uitgebreid verslag in drie talen Frans, Nederlands en Duits verschijnen; bij elke lezing een beknopte bibliografie.

De heer Gloden uit Luxemburg dankte de heer van Hercke voor de organisatie. Hij hoopte dat er structuur in de verzameling van de aanwezigen zou komen, die zou leiden tot groot succes in het toekomstig onderwijs.

Dr. Joh. H. Wansink sprak namens de Nederlanders zijn dank uit voor de uitstekende intellectuele en materiële verzorging. Toch waren er nog wel enige suggesties voor veranderingen. Het zou op prijs gesteld worden, indien de eerste avond gebruikt zou kunnen worden voor een nadere kennismaking met de deelnemers uit andere landen. De moeilijkheden aangaande de talen zou voor een belangrijk deel zijn opgelost indien er vóór de aanvang syllabi werden verstrekt b.v. in het Frans; maar dan ook bij het begin van de cursus voor alle lezingen. Een tendens tot meerdere samenhang tussen de voordrachten zou waarschijnlijk de uitwerking bevorderen.

Tegelijk met deze cursus in Brussel was er een cursus over hetzelfde onderwerp in Amsterdam. Door zijn belangrijkheid gaat „Brussel" voor, maar door een tijdige aankondiging zou het mogelijk zijn, beide evenementen niet op dezelfde dagen te houden.

De Zwitser F. Steiger uit Bern meende het wegblijven van de Zwitserse hoogleraren behalve aan de late uitnodigingsdatum ook te moeten toeschrijven aan de organisatie in Zwitserland zelf. Het onderwijs is daar een Kantonale aangelegenheid.

Prof. Papy uit Brussel wees op het ontstaan van grotere coherentie tussen de onderdelen der wiskunde door de moderne verzamelingenleer. Bij dit grotere contact tussen universiteit en onderwijs wilde spr. ook praktisch werk inschakelen.

Prof. Hirsch (Gent) vroeg zich af, wat men van zo'n cursus kan verwachten. Men kan vooreerst op de muziek der middelbare school de nieuwe stof aanbieden door b.v. te wijzen op algebraïsche en topologische structuren. Maar de hoogleraar is niet voldoende thuis in de middelbare school.

Als tweede zaak zou men de kandidaten de nieuwe veranderde stof van hun oude studie kunnen voorzetten. Dan komen Distributies, nieuwe integraalbegrippen enz. in aanmerking.

Als derde punt kan men kiezen de nieuwe cultuur in de wiskunde. De leraar moet toch de richting van het hoger onderwijs kennen, zeker van het eerste jaar.

De Belgische collega De Punt uit Gent meende met Prof. Papy dat de stof in de eerste plaats gericht moet zijn op de toepassing in het M.O. en wilde daartoe ook praktische oefeningen. De heer Thijssen echter meende dat het hier een kennisname betrof met de universiteit en dat de toepasbaarheid voor het M.O. beter in elk land afzonderlijk kan worden bezien.

Tot aller vreugde stelde Dr. Bosteels voor het aantal voordrachten te beperken tot vier per dag.

De directeur-generaal Levarlet sloot de cursus met een dankwoord aan de Brusselse universiteit voor haar organisatie.

ENKELE OPMERKINGEN NAAR AANLEIDING VAN HET ARTIKEL „RAKETTEN" [1]

door

Dr. W. BEVELANDER,

leraar aan de Koninklijke Militaire Academie te Breda.

Na lezing van het artikel „Raketten", van de hand van de heer Nicolai, zijn bij mij een aantal opmerkingen naar voren gekomen.

1°. De heer Nicolai gaat uit van de attractiekracht volgens Newton. De afleiding lijkt mij strenger en toch niet moeilijker, wanneer men de arbeid erbij bekijkt, die verricht wordt, als door de werking van deze kracht, de onderlinge afstand der lichamen verandert. Men kan dan tevens, eventueel, de zeer nuttige parallel trekken met de veldsterkte en de potentiaal uit de elektriciteitsleer.

De afleiding dacht ik mij aldus:

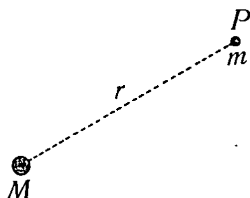


Fig. 1

Hebben we een attractiecentrum met een massa M en een lichaam met een massa m, die op afstand r van elkaar zijn gelegen, dan is de kracht die beide lichamen op elkaar uitoefenen, volgens de *attractiewet van Newton*:

$$K = f\frac{Mm}{r^2} \tag{1}$$

De arbeid, die nu verricht moet worden, om het lichaam met massa m van het punt P naar het oneindige te brengen is:

$$A = \int_r^\infty f\frac{Mm}{r^2}\,\mathrm{d}r = fMm\int_r^\infty \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = f\frac{Mm}{r} \tag{2}$$

[1]) A. H. Nicolai — Raketten, Euclides jg 36, pg 7—14.

Teneinde deze arbeid te kunnen verrichten, moet het lichaam met de massa *m*, in het punt *P* een snelheid *v* hebben, zodanig dat:

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = f\,\frac{Mm}{r}$$

of:

$$v_{par} = \sqrt{\frac{2fM}{r}} \qquad (3)$$

Hierin is v_{par} de *parabolische snelheid* en wel de *ontsnappingssnelheid* uit het punt *P*.

Willen we het lichaam met massa *m* op een afstand *r* van het attractiecentrum een *cirkelvormige baan* laten beschrijven, met dit centrum als middelpunt, dan moet het lichaam een *circulaire snelheid* v_{circ} krijgen, die volgt uit de betrekking:

$$f\,\frac{Mm}{r^2} = \frac{m{v^2}_{circ}}{r}$$

of:

$$v_{circ} = \sqrt{\frac{fM}{r}} \qquad (4)$$

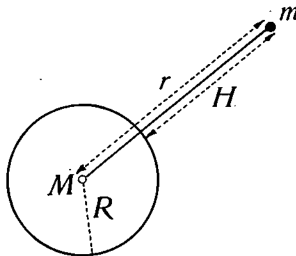


Fig. 2

Noemen we in fig. 2 nu de aardstraal *R* en de hoogte van het lichaam *m* boven het aardoppervlak *H*, dan kunnen we met behulp van de, ook door de heer Nicolai afgeleide, formule:

$$gR^2 = fM \qquad (5)$$

voor (3) en (4) schrijven:

$$v_{par} = \sqrt{\frac{2gR^2}{R+H}} = R\sqrt{\frac{2g}{R+H}} \qquad (6)$$

$$v_{circ} = \sqrt{\frac{gR^2}{R+H}} = R\sqrt{\frac{g}{R+H}} \qquad (7)$$

We vinden dus bovendien uit (6) en (7):

$$v_{par} = v_{circ}\sqrt{2} \qquad (8)$$

Op iedere hoogte kunnen we dus met (6), (7) en (8) de gewenste snelheden uitrekenen.

2°. Bij dit onderwerp berekent men ook steeds de *ontsnappingssnelheid vanaf het aardoppervlak.* De enorme snelheid van 11,1 km/sec, die we dan vinden, is spectaculair. In feite gaat het natuurlijk anders. De raket begint met een vrij kleine snelheid, wordt door zijn *stuwkracht* versneld en moet dan op grote hoogte, als zijn brandstoffen zijn verbruikt, een snelheid bereiken, die daar ter plaatse de *parabolische snelheid* is. Dan zal de raket in de wereldruimte verdwijnen. We moeten hierbij dan wel bedenken, dat uitsluitend de attractie van de aarde in aanmerking is genomen, terwijl die van alle overige lichamen van het zonnestelsel verwaarloosd is.

3°. Op blz. 10 en 11 van genoemd artikel, beschouwt de heer Nicolai een *aardsatelliet,* die een *circulaire baan* gaat beschrijven. Met de formule voor de *potentiële energie* berekent hij een vertreksnelheid vanaf het aardoppervlak, waarmede de gewenste hoogte bereikt wordt. Daarna leidt hij de circulaire snelheid af. Bovendien laat hij de raketmotor niet continu werken.

In werkelijkheid gaat het anders. De motor van de raket werkt voortdurend. Of, in het geval van een meertrapsraket, werkt de motor van de eerste trap, totdat deze is uitgebrand, waarna direct aansluitend de motor van de tweede trap begint, enz. Op de gewenste hoogte, waar de raket (of de satelliet) zijn baan gaat beschrijven, moet dan de *noodzakelijke circulaire snelheid* bereikt zijn.

4°. Zoals steeds wordt het gebruik van integralen vermeden. Nu het vak *differentiaal- en integraalrekening* op de middelbare school is ingevoerd, lijkt mij dit onjuist. Met de behandeling van dit onderwerp moet men zó vroeg beginnen, dat toepassing bij de mechanica en de natuurkunde mogelijk is. Mijn inziens kan dat ook best. Men moet de begrippen differentiaalquotiënt en integraal (ook de bepaalde integraal) verklaren. Daarna enkele van de meest voorkomende differentiaalquotiënten en integralen uitrekenen. Dit behoeft in het geheel niet moeilijk te zijn, daar de toepassing bij de mechanica en de natuurkunde heel eenvoudig blijft.

Deze dingen zijn bevattelijker, dan vele moeilijke vraagstukken uit de vlakke meetkunde van de derde klas, of van de ingewikkelde identiteiten, die moeten worden bewezen bij de goniometrie.

De wiskunde moet zoveel als in verband met het algemeen vormend karakter ervan verenigbaar is, worden gericht op de prak-

tijk. Een nog al eens gehoorde klacht van vele leerlingen is, dat ze het nut van de wiskunde niet inzien. Nu is de wiskunde een middel om goed te leren denken, doch een zodanig argument slaat gewoonlijk op een dergelijke leeftijd niet in. Als men deze wetenschap echter praktisch bij de natuurwetenschappen toepast, zien de leerlingen het nut in en verdwijnt gewoonlijk de bovengenoemde klacht.

5°. Het probleem van de luchtweerstand wordt in het artikel even aangesneden. Nuttig lijkt het mij, als hier even iets dieper op wordt ingegaan. De weerstand van de lucht is afhankelijk van de snelheid van het bewegende lichaam en van de dichtheid van de lucht [2]). Deze weerstand wordt groter als de snelheid toeneemt, doch vermindert, als de dichtheid van de lucht geringer wordt.

Tevens blijkt dan het nut van de lancering van aardsatellieten, met behulp van raketten. In het begin van de baan, waar de lucht nog vrij dicht is, heeft de raket een betrekkelijk geringe snelheid. Op grote hoogte is zijn snelheid aanmerkelijk groter, doch is de lucht ijler. We zien dus, dat de luchtweerstand in de onderste luchtlagen beperkt wordt door de snelheid en in de hogere lagen door de geringere dichtheid van de lucht. Het voordeel van het gebruik van raketten spreekt dus duidelijk.

Zouden we voor de lancering van aardsatellieten gebruik willen maken van een conventionele vuurmond, dan wordt de grootste snelheid bereikt bij het afschieten op het aardoppervlak. Nog afgezien van het feit, dat op deze wijze de gewenste snelheden niet verkregen kunnen worden, zou de luchtweerstand veel ongunstiger zijn, n.l. de grootste snelheden in de lucht met de grootste dichtheid.

---

[2]) Zie hiervoor o.a. mijn artikelen „De voortbeweging van een projectiel in de atmosfeer", gepubliceerd in Euclides jg. 35, pg. 145 en pg. 283.

DE WANDVERSIERING VAN EEN WISKUNDELOKAAL (II)

door

D. LEUJES
Delft

In Euclides 34e jrg., nr. X heb ik enige suggesties gegeven ten aanzien van de wandversiering van een wiskundelokaal naar aanleiding van een vraag, die mij daarover was gesteld. Op het verzoek om meer en andere ideeën over dit onderwerp heb ik alleen van Dr. D. J. E. Schrek bericht ontvangen, die mij verwees naar zijn artikel over hetzelfde onderwerp in Euclides 31e jrg., nr. II. Toen ik dat artikel nog eens nalas, bleek, dat ik het mijne beter in de pen had kunnen laten; immers, buiten de door mij genoemde Amerikaanse uitgave van portretten van wiskundigen, somt Dr. Schrek nog enkele andere verzamelingen op. Ieder, die op dit gebied zoekende is, kan ik dan ook ten zeerste aanbevelen het artikel van Dr. Schrek te lezen.

Verder schreef Dr. Schrek mij, dat het de moeite loont in Parijs eens een bezoek te brengen aan het Palais de la Découverte (Avenue Franklin D. Roosevelt, Paris 8e), waar ook een kleine maar interessante wiskundige afdeling is. In de Librairie, een boekwinkeltje binnen het gebouw, zijn verkrijgbaar:

1.	Courbes algébriques	(50 kaarten,	Prijs	6 NF).
2.	Courbes ornementales	(50 „ ,	„	6 NF).
3.	Courbes transcendantes	(50 „ ,	„	6 NF).
4.	Récréations mathématiques	(50 „ ,	„	6 NF).
5.	Portraits de mathématiciens	(10 „ ,	„	1,20 NF).
6.	Vie et géométrie	(10 „ ,	„	1,20 NF).

Het kwam Dr. Schrek voor, dat hierbij geschikt materiaal is om in een wiskundelokaal op te prikken; alleen nr. 5 vond hij maar matig.

Voor hen die zelf aan het tekenen willen gaan, bevat het boekje van Ir. A. E. Bosman, „Het wondere onderzoekingsveld der Vlakke Meetkunde", verscheidene aardige suggesties.

EEN GEVOLG VAN DE INVOERING VAN DE GREGORIAANSE KALENDER

door

J. F. Hufferman
Zeist

Het is altijd prettig wanneer we bij ons onderwijs een verband met de andere leervakken kunnen leggen.

Bij het onderwijs in de kosmografie behandelen we natuurlijk de kalender, een belangrijk cultuurhistorisch onderwerp.

In het, als „Meulenhoff-pocket'' in tweede druk verschenen werk van Dr. J. W. Berkelbach van der Sprenkel, „Oranje en de vestiging van de Nederlandse staat'', vond ik op pagina 176 het volgende dat ik hierbij gaarne doorgeef, omdat het een interessant gevolg mededeelt van de invoering van de Gregoriaanse kalender. Het gaat over de z.g. Franse Furie. „Op deze 17de januari (1583) waagde Anjou een „greep naar de macht'': hij trachtte Antwerpen en verschillende grote en kleine steden van het Zuiden te bezetten. Waarom had die „Franse Furie'' op de 17de januari plaats? Een der moderne onderzoekers van deze periode heeft deze vraag op vernuftige wijze beantwoord. In oktober 1582 had paus Gregorius XIII de wijziging van de bestaande, Juliaanse, kalender ingevoerd, die o.a. inhield dat men, ter correctie van een in de geldende kalender bestaande fout, op een bepaald ogenblik tien dagen zou overslaan. Spanje had 's pausen bevel onmiddellijk opgevolgd, Frankrijk weldra — het is begrijpelijk dat de handeldrijvende, internationaal georiënteerde Nederlandse gewesten niet achter wilden blijven, in tegenstelling met Gelderland, Utrecht, Overijsel, Friesland, Groningen, die hun trouw aan de oude stijl nog meer dan een eeuw, (tot het jaar 1700!), handhaafden. Zo was het dus daags na 13 december, de dag van het besluit der Staten-Generaal, te Antwerpen de 24ste — te Brugge, waar het besluit pas de 21ste 's avonds bekend werd, was het de volgende dag Nieuwjaar, zodat de Bruggelingen voor het eerst sedert de dagen der evangelie-predikers, een jaar zonder kerstfeest beleefden. De 17de januari was dus eigenlijk de 7de, de dag na Driekoningen en men behoeft zich het schilderij van Jordaens „De

koning drinkt" of de beschrijving van de overwintering der Hollanders op Nova Zembla maar te herinneren om te weten dat onze vaderen deze sindsdien bijna verdwenen feestdag met eet- en drinkpartijen plachten te vieren. Anjou's toeleg zou dus geweest zijn de nog dommelige, hun roes uitslapende Antwerpenaars te overvallen, maar de verandering in de kalender speelde hem parten en de 17de waren ze wakkerder, dan hij gehoopt had."

BOEKBESPREKING

Dr. Georg Wolff, *Handbuch der Schulmathematik*; Band I, Arithmetik, Zahlen lehre; 275 blz., geb. 38 D.M.; Band II, Algebra; 276 blz. geb. 38 D.M. Hermann Schroedel Verlag, Hannover.

Onze Duitse collega's beschikken straks in het zesdelige ,,Handbuch der Schulmathematik" van Dr. Wolff over een informatiebron ten aanzien van de door hen te onderwijzen leerstof van zo grote waarde, dat wij, Nederlandse collega's, een gevoel van jaloezie niet geheel kunnen onderdrukken. Wij hopen, dat er in onze taal en afgestemd op de wezenlijke behoeften van ons v.h.m.o. ook eenmaal een boek zal verschijnen, dat wat de rijkdom van inhoud en de nauwgezetheid van de vele samenvattingen betreft voor Dr. Wolff's handboek niet zal hebben onder te doen.

Zeker, er zijn in de laatste jaren tal van boeken verschenen, die in bepaalde behoeften van de wiskundeleraar kunnen voorzien, boeken over de verschijning waarvan we ons intens verheugen, als we ons realiseren welke diensten ze de wiskunde-docent kunnen bewijzen. We denken b.v. aan de onovertroffen ,,*Grundzüge der Mathematik*", een uitgave van de Duitse onderwijscommissie voor Wiskunde, van de hand van Behnke, Fladt, en vele anderen. Van dit vierdelig werk van grote allure zijn thans ook twee delen verschenen, die de Grundlagen der Mathematik, de Arithmetik, de Algebra en de Geometrie behandelen. Ze appelleren aan de behoeften van de wiskundeleraar, in zoverre deze ook ,,geleerde" is; ze confronteren hem met de huidige stand van de vakwetenschap door samenvattingen te geven, die door de samenwerking van hoogleraren en leraren wetenschappelijk verantwoord èn tevens goed leesbaar zijn. Maar in deze Grundzüge zal de docent, die iets zou willen naslaan met het oog op zijn werk in de klasse, slechts zelden iets aantreffen, dat hij voetstoots op school kan gebruiken.

Geheel anders is de opzet van Dr. Wolff geweest.

,,Schon seit Jahren wurde aus Kreisen der Referendare, der Assessoren sowie erfahrener Lehrer der Mathematik der Wunsch nach einem Werk zur Vorbereitung des Unterrichts geäußert, das zeigen soll, wie die Teilbereiche der Schulmathematik nach den neuesten Anschauungen der Didaktik praktisch gestaltet werden können. Deshalb ist das Hauptziel unserer 6 Bände in der gedanklichen Durchdringung der schulgemäßen Mathematik mit der modernen Methodik, mit der Entwicklung ihrer Einzelproblematik und mit der ständig fortschreitenden Hochschulmathematik zu sehen."

Aldus begint het voorwoord van deel I.

Dr. Wolff heeft zich de medewerking van meer dan twintig vakgenoten voor de totstandkoming van dit handboek weten te verzekeren.

In tegenstelling tot tal van boeken die in de 20e eeuw in het buitenland over de ,,Methodiek der wiskunde" zijn verschenen, wordt in dit handboek het volle ge-

wicht gelegd op concrete voorbeelden en overzichtelijke resumé's van de met diverse onderwerpen in verband staande problemen, die nergens uitputtend worden behandeld. Het boek schrikt daardoor nergens af door lange betogen, die immers voor de oriëntatie die men de lezer wenst te verschaffen niet nodig zijn, het boeit door de kernachtigheid der samenvattingen.

De Nederlandse lezer houde er echter rekening mee, dat er in dit handboek zeer veel stof ter sprake komt, waarvoor in ons v.h.m.o. geen plaats is. Dit houdt verband met de andere organisatie van het Duitse schoolwezen in vergelijking tot het Nederlandse. Zo ontbreekt in ons land in het v.h.m.o., wat men ginds de „Unterstufe" noemt, terwijl in Duitsland in de hoogste klassen tal van onderwerpen behandeld worden of althans behandeld kunnen worden, die verre buiten het leerplan van ons v.h.m.o. staan. Dit zijn echter geen factoren die de waarde van het handboek voor Nederlandse lezers kleiner maken.

Er is nog een punt waar we de aandacht op willen vestigen om mogelijk misverstand te weren. Deze tot dusver verschenen delen behandelen in hoofdzaak methodische problemen, bijna nergens didactische, hoewel deze term in het gegeven citaat voorkomt, als ik althans onder de didactiek de leer van de systematische overdracht van kennis en vaardigheden mag verstaan. Het gaat in deel I en deel II vrijwel overal over de leerstof en niet over de leerling en het leerproces. Ik wijs er echter op dat het vijfde deel o.a. de axiomatiek, de filosofie en de psychologie zal behandelen, zodat de door mij bedoelde aspecten, die in de eerste delen niet systematisch in het oog worden gehouden, straks separaat behandeld zullen worden.

Het eerste hoofdstuk van deel I gaat over „das Rechnen auf der Unter- und Mittelstufe" en heeft de volgende ondertitels: (1) Grundsätzliches zu Ziffer und Zahl; (2) Die vier Grundrechenarten mit natürlichen Zahlen; (3) Zahlentheoretisches; (4) Das Rechnen mit Brüchen; (5) Brüche und Dezimalzahlen; (6) Numerisches Rechnen; (7) Schluszrechnen; (8) Negative Zahlen; (10) Potenzrechnen; (11) Logarithmen.

Het tweede hoofdstuk behandelt: „das Rechnen auf der Oberstufe" en gaat over: (1) Komplexe Zahlen; (2) Arithmetische Folgen und Reihen; (3) Kombinatorik; (5) Finanz- und Versicherungsmathematik.

Het derde hoofdstuk is gewijd aan „das Rechnen in Arbeitsgemeinschaften" en heeft tot ondertitels: (1) Statistik; (2) Zahlentheorie; (3) Mengenlehre.

In het tweede deel wordt de leerstof van de algebra besproken. Niet slechts de leerstof die thans algemeen gangbaar is, maar tevens de leerstof in de school van morgen. Zo is een der ondertitels van de „Algebra der Mittelstufe": Linear-planung (Linear Programming) en een der ondertitels van de „Algebra der Oberstufe": Aus der theorie der algebraischen kurven. Tot de „Spezielle Probleme" van hoofdstuk III behoren de algebraïsche structuren (groep, ring, lichaam, tralie, lineaire vektorruimte) en voorts de lineaire algebra.

De buitengewoon rijke inhoud aan ter sprake gebrachte problemen maakt dat het weinig zin heeft op details in te gaan. Ik wil toch voor een enkel onderwerp een uitzondering maken.

Aan de logaritmen (Mittelstufe) worden 14 bladzijden gewijd. Na de behandeling der exponentiële en logaritmische functies wordt de logaritme-neming eerst behandeld als een inverse bewerking der machtsverheffing. Daarna worden logaritmen volgens de methode van Felix Klein met behulp van integralen gedefinieerd. De berekening heeft plaats volgens een reeds bij Gausz te vinden methode, waarbij machten van priemgetallen vergeleken worden met machten van 10, door herhaald kwadrateren, door ontwikkeling in een machtreeks en daarna, om historische redenen, volgens de methode van Bürgi. Rekenliniälen worden uitvoerig besproken.

Het valt de Nederlandse lezer op, dat ondanks de verscheidenheid der methoden die het boek bevat de simpele methode door Ir. D. J. Kruijtbosch ontwikkeld in zijn „*Avontuurlijk wiskundeonderwijs*" en ook opgenomen in *Euclides* (elfde jaargang, blz. 105 e.v.) niet is besproken. Euclides komt wel voor in de lijst van tijdschriften, waarnaar Dr. Wolff de lezers verwijst. De methode van Kruijtbosch steunt op eenvoudige kettingbreuken (zonder dat deze naam wordt genoemd) en leent zich uitstekend voor een berekening van b.v. log 2 in een derde klasse van een h.b.s. Het ontbreken van deze methode in Wolff's handboek doet ons zien, hoe een werk als dit ondanks zijn rijke inhoud toch voor Nederlanders iets te wensen kan overlaten.

Bij de opvolgende hoofdstukken vinden we waardevolle, uitvoerige litteratuurverwijzingen ingesteld op de behoeften van de Duitse docent.

De uiterlijke verzorging van de beide delen is boven alle lof verheven.

We zien verlangend uit naar de volgende delen van deze serie van zes handboeken der schoolwiskunde en hopen op de verschijning ervan in *Euclides* de aandacht op te kunnen vestigen.

We zijn de initiatiefnemer Dr. Wolff dankbaar voor de wijze waarop hij de vaklitteratuur voor de wiskundeleraar gericht op de klassepraktijk heeft weten te verrijken.

Joh. H. Wansink

RECREATIE

Nieuwe opgaven met oplossing (s.v.p. persklaar) en correspondentie over deze rubriek gelieve men te zenden aan Dr. P. G. J. Vredenduin.

47. Dr. J. D. A. Boks-Leiden zendt ons het volgende zinnetje waarmee we de waarde van π in liefst 30 decimalen kunnen onthouden: „Wel, u kunt π aldus onthouden; we kunnen altijd met gemak ettelijke decimalen daarvan berekenen, als we dit regeltje maar kennen; we vinden hier dan die getallen met de woorden aangeduid." Dit is dus geen opgave tenzij u aan het werk wilt gaan en nog meer decimalen wilt vastleggen.

48. Bij een stemming over de kleur van een ambtsgewaad wordt door de bekleders van het ambt gestemd. Het gaat om de kleuren groen, blauw en zwart. Ieder levert een stembriefje in, waarop hij de kleuren in volgorde van waardering vermeldt. De uitslag is als volgt:

groen,	blauw,	zwart	15 stemmen
blauw,	zwart,	groen	9 stemmen
zwart,	groen,	blauw	10 stemmen
zwart,	blauw,	groen	12 stemmen
groen,	zwart,	blauw	7 stemmen
blauw,	groen,	zwart	8 stemmen.

Thans wordt gestemd, wie de voorkeur geeft aan groen boven blauw; uitslag, 32—29. Daarna wie blauw prefereert boven zwart; uitslag 32—29. En ten slotte wint zwart het van groen met 31—30. Wordt gevraagd aan welke eis de zes stemresultaten moeten voldoen om een dergelijk paradoxaal resultaat op te leveren.

OPLOSSINGEN

(zie voor de opgaven het vorige nummer)

45. Oplossing. Als men tracht een serie *k k k k k k* te werpen en men heeft b.v.

reeds drie keer kruis geworpen, maar daarna volgt munt, dan moet men weer geheel van voren af aan beginnen.

Tracht men echter een serie *k k m m k k* te gooien en gooit men drie keer kruis, dan is de derde worp weliswaar in zoverre verkeerd, dat het munt had moeten zijn, maar men behoeft niet van voren af aan te beginnen. De laatste twee keer kruis kunnen gebruikt worden als begin voor een goede serie.

46. We bekijken het spel eerst in het algemeen, los van de gestelde „begin-voorwaarden".

1. De speler, die aan de ander de zak met een oneven aantal knikkers overlaat, verliest. De tegenspeler neemt dan één knikker enz.

2. Men heeft dus alleen kans om te winnen, wanneer men een even aantal overlaat. Laat men de tegenstander nu een oneven aantal malen 2 knikkers, dan neemt deze 2 en men verliest, want wie het eerst één neemt is verloren volgens 1., zodat niet verondersteld mag worden, dat de tegenpartij dit zal doen. En wanneer beide steeds 2 blijven nemen, verliest de speler, die steeds een even aantal malen 2 voorgezet krijgt. Het is dus noodzakelijk, de ander een even aantal malen 2 knikkers, dus een aantal malen 4 knikkers over te laten.

3. Deze redenering voortzettende, komt men tot de conclusie, dat men alleen kan winnen, wanneer men aan de andere partij een aantal knikkers overlaat, dat gelijk is aan een even aantal malen de hoogste macht van 2, die nog in aanmerking komt.

4. Het hangt dus geheel van de beginvoorwaarden af, of dit niet, op slechts één manier of op meer manieren te verwezenlijken is. Een voorbeeld van het eerste: 1024 knikkers, de eerste keer hoogstens 100. Van het derde: 1000 knikkers, de eerste keer hoogstens 100. Men kan dan 8 nemen (1000 = oneven aantal maal 8), ook wel 40 (960 = even aantal maal 32).

Aan de hand van het bovenstaande ziet men nu gemakkelijk in, dat onze opgave maar één oplossing heeft: A neemt de eerste keer 64 knikkers en de verdere speelwijze volgt wel uit de gegeven redenering. Het is wel aardig op te sommen, waar de andere aantallen op stranden.

elk oneven aantal:	er blijft over: oneven aantal
2, 6, 10, 14, . . . 98:	oneven aantal maal 2
4, 12, 20, 28, . . . 100:	oneven aantal maal 4
8, 24, 40, 56, 72, 88:	oneven aantal maal 8
16, 48, 80:	oneven aantal maal 16
32, 96:	oneven aantal maal 32